САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Б.А. Самокиш

СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Вещественный и комплексный случай.

Санкт-Петербург

2021

Р е ц е н з е н т ы: докт. физ.-мат.наук, профессор Морского технологического университета В.Б. Хазанов

докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры параллельных алгоритмов Ю.К. Демьянович

Рекомендовано к печати
Учебно-методической комиссией по УГСН 01.00.00 Математика и механика
Протокол 06/01-03-15 от 24.12.2020 г.

Самокиш Б.А.

Сходимость интерполяционных процессов. СПб., СПбГУ, 2021. 18 с.

В предлагаемом пособии изложены вопросы сходимости интерполяционных процессов на отрезке вещественной оси и на компакте в комплексной плоскости. Рассмотрены случаи равноотстоящих и чебышевских узлов. Доказывается фундаментальная теорема Калмара - Уолша о необходимом и достаточном условии сходимости на компакте в комплексной плоскости.

1. Интерполирование на отрезке вещественной оси.

Пусть на конечном отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и пусть

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\, \omega'(x_k)},$$

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k),$$

интерполяционный полином для нее по узлам $x_k, k = 0, \ldots, n$, лежащим на отрезке.

Говорим, что задан интерполяционный процесс, если для каждого натурального n задан набор узлов $\left\{x_k^{(n)}\right\}, k = 0, 1 \ldots n$. Тем самым для каждого n задан интерполяционный полином по этим узлам.

Говорим, далее, что этот процесс сходится для функции $f(x)$ (на классе K), если $p_n(x) \to f(x)$ равномерно на $[a, b]$ (для каждой функции из класса).

Известно представление остатка интерполирования

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ некоторая неизвестная точка на отрезке.

Это представление не дает возможности оценить остаток и составить суждение о сходимости для не слишком узких классов функций.

Другой подход к вопросу о сходимости интерполирования состоит в сравнении погрешности интерполирования с наилучшим равномерным приближением.

Оценим значение интерполяционного полинома в точке x через значения функции в узлах:

$$|p_n(x)| \le \sum |f(x_k)|\, |l_k(x)| \le \sum |l_k(x)|\, max\, |f(x)|,$$

$$max\, |p_n(x)| \le max \sum |l_k(x)|\, max\, |f(x)|.$$

Функция

$$L_n(x) = \sum |l_k(x)|$$

называется функцией Лебега интерполяционного процесса, а число

$$L_n = max \sum |l_k(x)|$$

- константой Лебега.

Имеем оценки:

$$|p_x(x)| \le L_n(x)\, max\, |f(x)|,$$

$$max\left|p_n\left(x\right)\right|\leq L_n max\left|f\left(x\right)\right|.$$

Эти оценки, очевидно, достигаются. Можем сказать, что $L_n\left(x\right)$ есть норма функционала в C, ставящего в соответствие функции $f\left(x\right)$ значение интерполяционного полинома в точке x, а L_n есть норма оператора, сопоставляющего функции ее интерполяционный полином.

Пусть p_n^* полином наилучшего равномерного приближения для $f\left(x\right)$, так что $\left|f\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)\right|\leq E_n$, E_n наилучшее приближение. Тогда

$$p_n\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)=\sum f\left(x_k\right)l_k\left(x\right)-\sum p_n^*\left(x_k\right)l_k\left(x\right),$$

так как для $p_n^*\left(x\right)$ интерполяционный полином с ним совпадает, и

$$max\left|p_n\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)\right|=max\left|\sum\left(f\left(x_k\right)-p_n^*\left(x_k\right)\right)l_k\left(x\right)\right|\leq L_nE_n,$$

$$max\left|f\left(x\right)-p_n\left(x\right)\right|\leq max\left|f\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)\right|+max\left|p_n\left(x\right)-p_n^*\left(x\right)\right|\leq\left(L_n+1\right)E_n.$$

Класс сходимости интерполяционного процесса зависит от поведения констант Лебега. Если бы нашелся такой процесс, для которого L_n ограничены, такой процесс сходился бы на классе всех непрерывных функций. Такого процесса, увы, в природе не существует: всегда $L_n\to\infty$.

Оценим константы Лебега для двух важных частных случаев.

1. Узлы Чебышева. На отрезке $[-1,1]$ возьмем в качестве узлов интерполирования корни полинома Чебышева 1-го рода $T_{n+1}\left(x\right)=\cos\left(n+1\right)\arccos x$:

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{2k+1}{2\left(n+1\right)}\pi,\ k=0,\ldots,n.$$

Надо оценить

$$L_n\left(x\right)=\sum\left|l_k\left(x\right)\right|,l_k\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{T_{n+1}\left(x\right)}{\left(x-x_k\right)T_{n+1}^{'}\left(x_k\right)}.$$

Положим

$$x=\cos\phi,0\leq\phi\leq\pi,\ x_k=\cos\phi_k,\phi_k=\frac{2k+1}{2\left(n+1\right)}\pi,$$

$$T_n^{'}\left(x_k\right)=n\frac{\sin n\phi_k}{\sin\phi_k}=\left(-1\right)^n\frac{n}{\sin\phi_k},$$

так что

$$l_k\left(x\right)=\frac{\cos n\phi}{\cos\phi-\cos\phi_k}\left(-1\right)^n\frac{\sin\phi_k}{n}.$$

Заметим,что

$$\left|l_k\left(x\right)\right|\leq 2$$

для всех x, k. Действительно:

$$\left|\frac{\cos n\phi}{\cos\phi-\cos\phi_k}\right| = \left|\frac{\cos n\phi-\cos n\phi_k}{\cos\phi-\cos\phi_k}\right|$$

$$= \left|\frac{\sin n\frac{\phi-\phi_k}{2}}{\sin\frac{\phi-\phi_k}{2}}\right| \left|\frac{\sin n\frac{\phi+\phi_k}{2}}{\sin\frac{\phi+\phi_k}{2}}\right| \le \frac{n}{\sin\frac{\phi+\phi_k}{2}},$$

$$|l_k(x)| \le \frac{\sin\phi_k}{\sin\frac{\phi+\phi_k}{2}} \le \frac{\sin\phi_k+\sin\phi}{\sin\frac{\phi+\phi_k}{2}} \le 2,$$

потому что график функции $\sin\phi$ на отрезке $[0,\pi]$ выпуклая вверх кривая.

Пусть $\phi_m < \phi < \phi_{m+1}$. Оценим "левую часть"суммы $L_n(x)$:

$$\sum_{k=1}^{m} |l_k(x)| = |l_m(x)| + |l_{m-1}(x)| + \sum_{k=1}^{m-2} |l_k(x)|$$

$$\le 2+2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\phi_k}{\cos\phi-\cos\phi_k} \le 4+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-2}\int_{\phi_k}^{\phi_{k+1}}\frac{\sin\theta}{\cos\phi-\cos\theta}d\theta,$$

так как подинтегральная функция, как легко проверить, возрастает.

$$= 4+\frac{1}{\pi}\int_{\phi_0}^{\phi_{m-1}}\frac{\sin\theta}{\cos\phi-\cos\theta}d\theta \le 4+\frac{1}{\pi}\ln\frac{2}{\cos\phi_1-\cos\phi_2}.$$

Но

$$\cos\phi_1-\cos\phi_2 = \cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{3\pi}{2n} = 2\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{n} \ge \frac{2}{n^2},$$

для левой суммы оценка $4+\frac{2}{\pi}\ln n$, а для правой, разумеется, такая же, и

$$L_n \le 8+\frac{4}{\pi}\ln n.$$

Согласно теореме Джексона, наилучшее приближение допускает оценку

$$E_n \le \frac{CM}{n^\alpha}$$

на классе функций, удовлетворяющих условию Липшица:

$|f(x')-f(x'')| \le M|x'-x''|^\alpha$ для всех $x', x'' \in [a,b]$.

На этом классе интерполяция, таким образом, сходится, каково бы ни было α.

2. Равноотстоящие узлы. Отрезок $[-1,1]$, n, для определенности, нечетное: $x_k = -1+\frac{k}{n}, k = 0,\ldots,2n$. Здесь константу Лебега интересно оценить снизу. Возьмем значение узлового полинома для узла $x_n = 0$ в точке $-1+\frac{1}{2n}$:

$$l_n\left(-1+\frac{1}{2n}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{k}{n}\right)}{\left(-1+\frac{1}{2n}\right)\prod_{k=0,k\neq n}^{2n}\left(-1+\frac{k}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{2n}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{\left(-n+\frac{1}{2}\right)(-1)^n(n!)^2}$$

$$= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)n} \prod_{k=2}^{n} \frac{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\left(2k-\frac{3}{2}\right)}{k\,(k-1)} \frac{3}{2}\frac{1}{2}.$$

Каждая из дробей в произведении Π больше, чем 4, а всего их $n-1$, так что

$$L_{2n+1} \geq |l_n(x)| \geq \frac{3}{8} \frac{1}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)} 2^{2n-2}.$$

Нет оснований ожидать существенно другой оценки для четного n, так что $L_n \geq \gamma_n 2^n, \gamma_n$ - медленный множитель. Это означает, что класс сходимости процесса для равноотстоящих узлов весьма узок и даже не включает некоторые аналитические функции, ибо для аналитичности на отрезке, согласно теореме Бернштейна, достаточно убывания наилучших приближений со скоростью любой геометрической прогрессии.

2. Интерполяция на компакте в комплексной плоскости.

Заметим прежде всего, что не на всяком замкнутом множестве комплексной плоскости непрерывную функцию можно приблизить полиномом с любой точностью.

Пример. Функция z^{-1} на единичной окружности или в кольце $q < |z| < Q$ не может быть представлена сходящейся последовательностью полиномов, ибо такая последовательность по принципу максимума сходится внутри к аналитической функции, а z^{-1} не аналитична внутри.

Теорема Рунге (без доказательства). Пусть K компакт в C со связным дополнением. Пусть $f(z)$ аналитична на K. Тогда существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся на K к $f(z)$.

Удобно представлять интерполяционный полином и остаток интерполирования контурным интегралом:

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(t)-\omega(z)}{(t-z)\,\omega(t)} f(t)\,dt$$

$$r_n(z) = f(z) - p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(z)}{(t-z)\,\omega(t)} f(t)\,dt,$$

где $\omega(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(z - x_k^{(n)}\right)$, Γ контур, на котором и внутри него $f(z)$ аналитична, а узлы и точка z лежат внутри него.

Каждая из этих формул вытекает из другой в силу формулы Коши. Из первой видно, что $p_n(z)$ есть полином, из второй — что он интерполяционный. Узлы могут совпадать, тогда получаем эрмитов интерполяционный полином.

Пусть K — компакт, удовлетворяющий условию Рунге. Мы будем изучать сходимость интерполирования для функций аналитических на K, причем узлы, естественно, берутся на K. Если рассматривать произвольный интерполяционный процесс, то, вообще говоря, окажется, что для сходимости на K недостаточно одной лишь аналитичности на K интерполируемой функции.

Пример 1. Отрезок $[-1,1]$, узлы равноотстоящие. Для сходимости необходимо $E_n \le \gamma_n 2^{-n}, \gamma_n$ медленный множитель, а для аналитичности — лишь $E_n = O\left(q^n\right)$ с некоторым $q < 1$.

Пример 2. Отрезок $[-1,1]$, узлы все в начале координат интерполяционный полином есть отрезок ряда Маклорена. Для сходимости необходима аналитичность в единичном круге.

Мы ставим вопрос, в известном отношении крайний: какой должна быть система узлов на K, чтобы сходимость имела место для всякой функции, аналитической только лишь на K.

Рассмотрим сперва специальный случай: K — единичный круг. Узлы расположим равномерно на концентрической окружности: $x_k^{(n)} = ae^{2\pi i \frac{k}{n+1}}, 0 \le a \le 1, k = 0, \ldots n$.

Тогда $\omega\left(z\right) = z^{n+1} - a^{n+1}$,

$$r_n\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{z^{n+1} - a^{n+1}}{t^{n+1} - a^{n+1}}\frac{f\left(t\right)}{t-z}dt.$$

Функция аналитична в единичном круге. Пусть R радиус максимального круга с центром в нуле, внутри которого $f\left(z\right)$ аналитична. Возьмем в качестве Γ окружность $|t| = R_1 < R$ и пусть $|z| = \rho < R_1$. Тогда

$$r_n\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(\frac{z}{t}\right)^{n+1}\frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{a}{t}\right)^{n+1}}\frac{f\left(t\right)}{t-z}dt,$$

$$\left|r_n\left(z\right)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{n+!}\frac{1+\frac{a}{\rho}}{1-\frac{a}{R_1}}\frac{1}{R_1-\rho}2\pi R_1 max_\Gamma\left|f\left(t\right)\right|$$

$$\le const\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{n+1}.$$

Можно сделать следующие выводы:

а) интерполяция сходится на K для всякой функции $f\left(z'\right)$,аналитической на K;

б) скорость сходимости на K — геометрическая прогрессия со знаменателем любым, большим $1/R$;

в) интерполяция сходится всюду внутри максимального круга, в котором $f\left(z'\right)$ аналитична, причем скорость сходимости на окружности $|z| = \rho$ — геометрическая прогрессия со знаменателем любым, большим чем ρ/R.

Такую сходимость будем называть максимальной.

Нам понадобится следующее утверждение:

Лемма о компактности семейства аналитических функций.

Всякое семейство функций, ограниченное в некоторой области, компактно в смысле равномерной сходимости на всяком внутреннем замкнутом множестве.

Доказательство. Проверим условия теоремы Арцела – Асколи. Равномерная ограниченность предполагается. Проверим равностепенную непрерывность. Пусть T замкнутое множество, лежащее в нашей области, $z', z'' \in T$. По формуле Коши

$$f\left(z'\right) - f\left(z''\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f\left(t\right)}{t - z'}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f\left(t\right)}{t - z'}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(z' - z''\right)\int_C \frac{f\left(z\right)}{\left(t - z'\right)\left(t - z''\right)}dt;$$

$$\left|f\left(z'\right) - f\left(z"\right)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{|C|}{d^2}M\left|z' - z"\right|.$$

Здесь C кривая, лежащая в нашей области и охватывающая T, $|C|$ - ее длина, d - расстояние между C и T, M - оценка для функций нашего семейства. Равностепенная непрерывность, а с ней и компактность, доказаны.

Обратимся теперь к основной теореме.Для упрощения будем доказывать ее для частного случая, когда K односвязный компакт в C, дополнение которого, обозначим его K_C, тоже односвязно. Например, K есть простая дуга или область, ограниченная простой замкнутой кривой. Пусть

$$z = \psi\left(w\right) = cw + c_0 + c_1 w^{-1} + \ldots$$

— функция. отображающая внешность единичного круга на K_C. Три параметра, задающие однозначно функцию $\psi\left(w\right)$, выберем так, чтобы точка $w = \infty$ переходила в $z = \infty$ и $c > 0$.

Пусть $w = \phi\left(z\right) = c^{-1}z + d_0 + d_1 z^{-1} + \ldots$ — обратная функция. Обозначим C_ρ множество, где $|\phi\left(z\right)| = \rho > 1$ - прообраз окружности. В нашем случае это простая замкнутая кривая, охватывающая K, при $\rho' < \rho$ кривая C_ρ охватывает $C_{\rho'}$. Узлы интерполяции, по предположению, лежат на K.

Рассмотрим функцию

$$\theta_n\left(z\right) = \frac{\sqrt[n+1]{\omega\left(z\right)}}{c\phi\left(z\right)}.$$

В области K_C функция $\sqrt[n+1]{\omega\left(z\right)}$ распадается на однозначные ветви. Выберем ту ветвь, на которой

$$\sqrt[n+1]{\omega\left(z\right)} = z + O\left(1\right)$$

при $z \to \infty$, ее можно определить так:

$$\sqrt[n+1]{\omega\left(z\right)} = \left(\prod_0^n\left(z - x_k\right)\right)^{\frac{1}{n+1}} = z\prod_0^n\left(1 - \frac{x_k}{z}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

где каждый множитель определяется биномиальным рядом.

Пусть $M_n = max_K |\omega(z)|$. Этот максимум достигается на $\partial K = \partial K_C$. Имеем:

$$max_{C_\rho} |\theta_n(z)| = \frac{max_{C_\rho} |\omega(z)|^{\frac{1}{n+1}}}{c\rho} \geq 1,$$

так как $\theta_n(\infty) = 1$. Устремляя ρ к 1, найдем:

$$\frac{M_n^{\frac{1}{n+1}}}{c} \geq 1.$$

Определение 1. Говорим, что система узлов распределена на K равномерно в смысле Уолша, если

$$lim \frac{M_n^{\frac{1}{n+1}}}{c} = 1.$$

Функции $\theta_n(z)$ ограничены в K_C, так как

$$M_n = max_K |\omega_n(z)| = max \prod |z - x_k| \leq (diamK)^{n+1},$$

и вне каждого C_ρ образуют компактное семейство. При выполнении условия $M^{\frac{1}{n+1}} \to c$ каждая предельная функция ограничена 1, и равна 1 на ∞, и следовательно, равна единице тождественно, и значит, вся последовательность $\theta_n(z)$ сходится к 1.

Верно и обратное: если $\theta_n(z) \to 1$ внутри K_C, то

$$M_n^{\frac{1}{n+1}} \leq max_{C_\rho} |\omega_n(z)|^{\frac{1}{n+!}} = max_{C_\rho} |\theta_n(z)| c\rho \to c\rho$$

для всякого ρ и учитывая, что $M_n^{\frac{1}{n+1}} \geq c$, получаем, что $M_n^{\frac{1}{n+1}} \to c$.

Определение 2. Система узлов распределена на K равномерно в смысле Уолша, если

$$\theta_n(z) \to 1, z \in K_C.$$

Эти определения равносильны.

Теорема Калмара – Уолша. Для того, чтобы интерполяционный процесс с узлами на K сходился на K для любой функции, аналитической на K, необходимо и достаточно, чтобы система узлов была распределена равномерно. При выполнении этого условия последовательность интерполяционных полиномов сходится максимально.

Достаточность. Пусть $f(z)$ аналитична на K. Пусть R максимальное такое, что $f(z)$ аналитична внутри C_R. Пусть $z \in C_\rho$. Возьмем $\rho', \rho < \rho' < R$, остаток интерполирования представим интегралом по $C_{\rho'}$:

$$r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho'}} \frac{\omega_n(z)}{(t-z)\,\omega_n(t)} dt.$$

Так как $|\omega_n(z)|^{\frac{1}{n+1}} \to c\rho$, а $|\omega_n(t)|^{\frac{1}{n+1}} \to c\rho'$, то при достаточно большом n будет $|\omega_n(z)|^{\frac{1}{n+1}} < c(\rho+\epsilon)$, $|\omega_n(t)|^{\frac{1}{n+1}} > c(\rho'-\epsilon)$, при произвольном $\epsilon < \rho'$. Получаем оценку:

$$|r_n(z)| \le \frac{1}{2\pi}\left|C_{\rho'}\right|\left(\frac{\rho+\epsilon}{\rho'-\epsilon}\right)^{n+1} d^{-1} max_{C_\rho}|f|,$$

d — расстояние между C_ρ и $C_{\rho'}$, $\left|C_{\rho'}\right|$ — длина кривой C_ρ.

Величина

$$\frac{\rho+\epsilon}{\rho'-\epsilon}$$

при произвольных ρ, ρ' и малом ϵ может быть сколь угодно близкой к $\frac{1}{R}$. Сходимость имеется всюду внутри C_R, а на самом K со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой сколь угодно близок к $1/R$. То есть, имеет место максимальная сходимость.

Необходимость. От противного. Пусть условие

$$M_n^{\frac{1}{n+1}}/c \to 1$$

не выполнено. Тогда найдется частичный предел

$$lim M_n^{\frac{1}{n+1}}/c = q > 1.$$

Возьмем $\rho < q$ и произвольную точку $a \in C_\rho$. Для функции $1/(z-a)$ остаток равен

$$r_n(z) = \frac{\omega_n(z)}{(z-a)\,\omega_n(a)},$$

интерполяция сходится равномерно на K, так что

$$M_n/\omega_n(a) \to 0,$$

и при достаточно больших n будет $M_n < |\omega_n(a)|$. Тогда

$$|\theta_n(a)| = \frac{|\omega(a)|^{\frac{1}{n+1}}}{c\,|\phi(a)|} \ge \frac{M_n^{\frac{1}{n+1}}}{c\rho} \to \frac{q}{\rho} > 1.$$

Выберем подпоследовательность, сходящуюся к функции $\theta(z)$. Тогда $|\theta(z)| \ge q/\rho > 1$ всюду на C_ρ, но $\theta(\infty) = 1$, что противоречит принципу максимума.

Примеры равномерно распределенных систем узлов.

1. Корни полинома, наименее уклоняющегося от нуля при фиксированном старшем коэффициенте.

Это довольно понятно. Естественно ожидать, что полином, наименее уклоняющийся от нуля в точном смысле, будет таковым и асимптотически.

2. Узлы Фекете. Так называется набор точек на K, дающий максимум модуля определителя Вандермонда

$$W\left(x_0, x_1, \ldots x_n\right)=\prod_{i<k}\left(x_i-x_k\right).$$

3. Узлы Фейера. Это прообразы точек, делящих на равные части окружность, которая является границей образа внешности K.

Рассмотрим важный пример: K есть отрезок $[-1,1]$. Функция Жуковского $z=\psi\left(w\right)=\frac{1}{2}\left(w+w^{-1}\right)$ отображает внешность (и внутренность) единичного круга на внешность отрезка. Видим, что $c=\frac{1}{2}$.

Обратная функция $w=z+\sqrt{z^2-1}$ вне отрезка распадается на две однозначные ветви, следует выбрать ту, для которой модуль больше единицы.

Кривая C_ρ - прообраз окружности, $|w|=\rho$ - здесь эллипс

$$z=\frac{1}{2}\left(\rho e^{i\phi}+\rho^{-1}e^{-i\phi}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho+\rho^{-1}\right)\cos\phi+i\frac{1}{2}\left(\rho-\rho^{-1}\right)\sin\phi,$$

$\rho=const, 0\leq\phi<2\pi$.

Узлами Фейера будут точки $x_k^{(n)}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}+e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\right)=\cos\frac{2k}{n+1}\pi, k=0,1,\ldots n$. При $n+1$ четном это суть корни полинома Чебышева 2-го рода степени $\frac{n-1}{2}$ - двойные узлы, с условием на первую производную, с добавлением концов отрезка как простых узлов.

Узлами Фейера также будут точки $\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$, корни полинома Чебышева 1-го рода степени $\frac{n+1}{2}$ при четном $n+1$ - все двойные узлы.

Возьмем в качестве простых узлов корни полинома Чебышева 1-го рода степени $n+1$:

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2\left(n+1\right)}, 0\leq k\leq n.$$

Покажем, что эта система равномерно распределена по Уолшу и, значит, обеспечивает максимальную сходимость. Полином $T_{n+1}\left(x\right)$ имеет старший коэффициент 2^n, поэтому

$$\omega_n\left(z\right)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}\left(z\right), M_n=2^{-n}, lim M_n^{\frac{1}{n+1}}=1/2=c,$$

условие Уолша выполнено. Можно проверить его и во второй форме. Используем известное представление полиномов Чебышева:

$$T_n\left(z\right)=\frac{1}{2}\left(\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}\right),$$

$$\theta_n\left(z\right)=\frac{\sqrt[n+1]{2^{-n}T_{n+1}\left(z\right)}}{\frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1} + (\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{z+\sqrt{z^2-1}} \to 1$$

всюду вне отрезка. Интерполяция сходится для любой функции, аналитической на отрезке, внутри максимального эллипса C_R, внутри которого функция аналитична. Сходимость на отрезке оценивается геометрической прогрессией с любым знаменателем, большим, чем $1/R$.

Таким образом, доказана в одну сторону теорема Бернштейна о наилучшем приближении аналитической на отрезке функции.

Литература:

1. И.К.Даугавет. Введение в теорию приближений. Изд. ЛГУ, Л., 1977.

2. Д.Гайер. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. Мир, 1986.

3. Дж.Уолш Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, 1961.